

Graphes Planaires homogènes de degré 3

JULES CHUARD

University of Lausanne, Switzerland

Communicated by Claude Berge

AVANT-PROPOS

Il y a fort longtemps que nous sommes occupé des graphes planaires homogènes de degré 3. A l'époque nous les dénommions réseaux cubiques. Nous les avons étudiés en liaison avec la surface qui leur servait de support. Pour cela nous avons utilisé la méthode de Veblen que nous avons déjà mise à profit pour l'élaboration de notre thèse de doctorat intitulée "Questions d'analysis situs". Cela nous a permis de montrer l'effet de la surface portante sur les propriétés du graphe envisagé. Ainsi on conçoit fort bien que le graphe qui est supporté par un tore par exemple, ne se présente pas du tout de la même manière que celui qui est tracé sur une sphère.

Entre 1923 et 1930 nous avons fait plusieurs communications d'une part à la Société mathématique suisse, d'autre part au Cercle mathématique de Lausanne que nous avons fondé en collaboration avec le regretté professeur Gustave Juvet. En 1923 le professeur J. Hadamard, membre de l'Institut de France, a présenté en notre nom à l'Académie des sciences de Paris une Note intitulée "Quelques propriétés des réseaux cubiques tracés sur une sphère" dans laquelle nous répartissions en 3 types distincts les réseaux quadratiques contenus dans un réseau cubique donné.

Les graphes homogènes de degré 3 que nous considérions alors étaient réductibles, en vertu d'un théorème de Petersen, cela de diverses manières, en un graphe homogène de degré 2 et un graphe homogène de degré 1. Nous avons ainsi été amené à classer les graphes homogènes de degré 2 en trois types ayant les caractéristiques suivantes:

Type I. Le graphe homogène de degré 2 est d'un seul tenant. Il est représenté par un contour fermé unique qui passe par l'ensemble des sommets du graphe de degré 3 considéré.

Type II. Le graphe homogène de degré 2 est formé de deux ou de plusieurs contours fermés, chacun d'eux renfermant un nombre pair d'arêtes.

Type III. Le graphe homogène de degré 2 comprend également deux ou plusieurs contours fermés, certains d'entre eux ayant un nombre impair d'arêtes.

Dans la suite pour éviter des longueurs nous désignerons les graphes homogènes de degré 2 sous le nom de "graphes R" tandis que les graphes homogènes de degré 1 sous le nom de "graphes L".

PREMIÈRE PARTIE

Le Cas général

Un polyèdre renferme des faces, des arêtes et des sommets. Il peut exister des faces limitées par 2 arêtes seulement comme aussi des faces qui ont en commun 2 arêtes frontières ou même davantage. Les faces sont des fragments de surface limitées par un contour fermé unique. L'essentiel enfin est que l'ensemble des arêtes constitue un graphe homogène de degré 3.

On dénombre séparément les faces, les arêtes et les sommets. Admettons qu'il y ait α_2 faces numérotées de 1 à α_2 , α_1 arêtes numérotées de 1 à α_1 et α_0 sommets numérotés de 1 à α_0 . L'ordre de numérotation est indifférent.

A l'aide des sommets et des arêtes du polyèdre, on dresse une matrice, la *matrice A*, de α_0 lignes et de α_1 colonnes. Une ligne se rapporte à un sommet, une colonne à une arête du polyèdre. Cette matrice ne contient que des nombres 0 et 1. Chaque colonne renferme 2 nombres 1. Les opérations d'arithmétique s'effectuant selon le module 2, seuls les nombres 0 et 1 interviennent. Le rang de la matrice *A* est égal à $\alpha_0 - 1$.

De la matrice *A* on tire un système d'équations linéaires et homogènes: le système 1. $\alpha_0 - 1$ de ces équations sont linéairement indépendantes. Le système 1 a donc $\alpha_1 - \alpha_0 + 1$ solutions linéairement indépendantes.

A l'aide des arêtes et des faces du polyèdre, on dresse une seconde matrice: la *matrice B*, de α_1 lignes et de α_2 colonnes qui ne contient également que des nombres 0 et 1. Une ligne se rapporte à une arête, une colonne à une face du polyèdre. Il y a 2 nombres 1 dans chaque ligne. Le rang de la matrice *B* est égal à $\alpha_2 - 1$. Chaque colonne de cette matrice définit une solution en nombres 0 et 1 du système 1, laquelle est représentée sur le polyèdre par un contour fermé, la frontière de la face correspondante.

Dans cette étude nous n'envisageons que des graphes homogènes de degré 3 tracés sur une sphère. Nous pouvons donc appliquer aux polyèdres qui en découlent le théorème d'Euler. Cela donne:

$$\alpha_1 - \alpha_0 + 1 = \alpha_2 - 1 = \mu,$$

ou

$$\mu - 1 = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\alpha_1}{3}.$$

Le nombre μ fixe la classe du polyèdre.

Il s'en suit que le nombre des sommets d'un tel polyèdre est pair tandis que celui de ses arêtes est un multiple de 3. Mais ce qui doit retenir notre attention d'une façon plus particulière c'est le fait que $\alpha_2 - 1$ colonnes de la matrice B constituent une matrice fondamentale de solutions du système 1. Cela signifie qu'à l'aide de ces colonnes on obtient toutes les solutions du système 1 qui ont une signification géométrique. Il y en a $2^\mu - 1$. La solution 0 est également une solution du système 1, mais elle n'a pas d'interprétation géométrique.

Ces solutions sont représentées sur le polyèdre par des contours fermés, ou des ensembles de contours fermés qui comprennent 2, 3, ... au maximum α_0 arêtes. Dans ce dernier cas, la solution caractérise un *graphe* R . Les arêtes restantes, en nombre $1/2 \alpha_0$, toutes séparées les unes des autres, définissent un *graphe* L .

Il nous a paru intéressant de rechercher le nombre n de graphes R qui sont contenus dans un graphe homogène de degré 3 donné. On remarque bien vite que pour un μ déterminé, il existe en général plusieurs graphes homogènes de degré 3 distincts (parfois même beaucoup), chacun d'eux ayant un nombre particulier n de graphes R .

Enlever une des colonnes de la matrice B revient à supprimer une des faces du polyèdre. Jusqu'ici toutes les arêtes étaient des *arêtes de liaison* puisqu'elles soudaient entre elles deux faces adjacentes du polyèdre. Maintenant les arêtes limitant la face qui a été enlevée ne sont plus adjacentes qu'à une seule face. Ce sont des *arêtes libres*.

Nous regarderons la face qui a été supprimée comme la *face de base* du polyèdre. Suivant une méthode qui est courante en topologie, nous admettons que cette face de base a été suffisamment étirée dans tous les sens pour faire apparaître, dans leurs positions respectives, toutes les autres faces du polyèdre. Il va de soi que suivant la face qui a été choisie comme face de base, l'aspect du polyèdre peut changer. Ce n'est toutefois qu'une simple apparence car le polyèdre a pas été modifié dans sa structure.

Nous conviendrons de désigner par k le nombre des arêtes qui limitent la face de base. Ce nombre, comme nous le verrons, revient constamment. Nous l'indiquerons donc entouré d'un petit cercle. Nous aurons à nous

préoccuper de sa parité, comme du reste de celle des frontières de toutes les faces du polyèdre examiné. Aussi pour éviter des répétitions inutiles, nous conviendrons une fois pour toutes, de désigner sous le nom de *face paire* toute face du polyèdre dont la frontière comporte un nombre pair d'arêtes. Si ce nombre est impair, la *face* elle-même est dite *impaire*.

Il n'est peut être pas inutile d'illustrer ce préambule par quelques exemples simples. Ceux que nous avons choisis appartiennent à la classe $\mu = 5$. Ils ont donc 6 faces. Nous les avons représentés planche 1 en choisissant comme face de base celle qui a le plus grand ou le plus petit nombre d'arêtes et éventuellement un cas intermédiaire. En voici du reste la composition

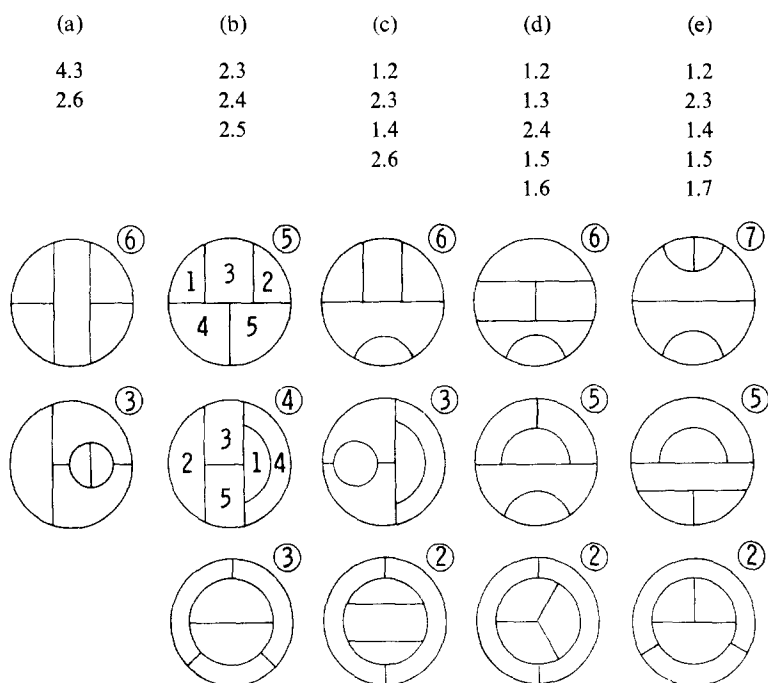


PLANCHE 1

Examen d'un Exemple particulier

Pour faire comprendre la méthode que nous allons utiliser, nous pensons que le mieux est de partir d'un exemple concret. A cet effet, nous reprenons l'exemple (b) planche 1, qui se compose de 2 triangles,

2 quadrilatères et 2 pentagones. Quelle que soit la face que l'on choisit comme face de base, le système 1 comporte 8 équations à 12 inconnues. Il y a 31 solutions que l'on consigne dans un *tableau D* de 12 lignes et 31 colonnes. Celles-ci sont réparties en 5 groupes distincts que nous numérotions à l'aide de chiffres romains I, II, III, IV, V. En voici la disposition:

TABLEAU D

					5
				45555	4
			3454554555	33444	3
		2345345455	2223343344	22233	2
12345	1111222334	1111112223	11112	1	
Groupes	I	II	III	IV	V

Le groupe I a 5 colonnes qui caractérisent les faces du polyèdre prises dans l'ordre suivant lequel elles ont été numérotées. Nous désignerons dorénavant le rang de chaque face sous le nom d'*indice*. Un indice se rapporte donc à une face du polyèdre.

Le groupe II comprend 10 colonnes de 2 indices chacune. Cela fait en tout 20 indices. Chaque indice est ainsi répété 4 fois. Le groupe III a 10 colonnes de 3 indices, chacun d'eux étant répété 6 fois. Le groupe IV dispose de 5 colonnes de 4 indices chacune. Le groupe V enfin ne comprend qu'une colonne de 5 indices.

Rappelons la notation bien connue des coefficients du binôme de Newton:

$$\binom{\mu}{k} = \frac{\mu!}{k!(\mu - k)!}.$$

La répartition des colonnes du tableau *D* est la suivante:

Groupe	Nombre de colonnes par groupe
I	5
II	10
III	10
IV	5
V	1
Total	<hr/> 31 = 2 ⁵ - 1

Ce sont là bien entendu les coefficients du binôme 2⁵. Le premier de ces coefficients fait défaut attendu qu'il se rapporte à la solution 0 qui n'a pas de signification géométrique.

Les colonnes du groupe I ont trait aux faces du polyèdre donné. Elles définissent des solutions du système 1 qui représentent les différentes frontières de ces faces.

Les autres colonnes du tableau *D* sont le résultat des additions respectives des colonnes du groupe I effectuées conformément aux indices qui les caractérisent. Il convient toutefois de rappeler que ces opérations s'effectuent selon le module 2 et que par conséquent $1 + 1 = 0$. Cela se produit lorsque les faces utilisées sont adjacentes et ont de cet fait une (ou des) arêtes communes. Une telle arête de liaison détermine pour nous un *double-indice*.

L'examen dutableau *D* montre que chaque indice 1, 2, 3, 4, 5 apparaît une fois dans le groupe I, 4 fois dans le groupe II, 6 fois dans le groupe III, 4 fois dans le groupe IV et une fois dans le groupe V, ce que nous résumons dans le tableau qui suit:

Groupe	Répétition du même indice
I	1
II	4
III	6
IV	4
V	1
Total	<hr/> 16 = 2^4

Cela résulte directement des propriétés du binôme. On reconnaît là d'ailleurs les coefficients du binôme 2^4 .

Il convient d'examiner de la même façon la répartition des doubles-indices 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2.3, 2.4, ..., 4.5. Il n'y en a pas bien entendu dans le groupe I. Dans les autres groupes leur nombre est fixé par les coefficients du binôme 2^5 .

Groupe	Répétition d'un double-indice
I	0
II	1
III	3
IV	3
V	1
Total	<hr/> 8 = 2^3

Tels sont les caractères qui nous ont engagé à remplacer le tableau *D* par un nouveau tableau double de 16 lignes, le *tableau A* en introduisant

le groupe 0. De cette façon les groupes 0 et V, I et IV, II et III, qui ont le même nombre d'éléments, sont placés en regard l'un de l'autre. Les colonnes du tableau D sont devenues les lignes du tableau Δ .

On doit prendre garde au fait suivant. Le groupe 0 caractérise la solution identiquement nulle qui est, comme nous l'avons dit du reste, une solution du système 1. Nous allons voir qu'elle s'associe d'une façon très heureuse aux solutions paires.

Mais auparavant constatons que l'on peut considérer comme *complémentaires*, par exemple, l'indice 1 et l'ensemble des indices 2, 3, 4, 5 ou les ensembles 1, 2 et 3, 4, 5 ou encore les ensembles 1, 2, 3 et 4, 5, etc. Dans le tableau Δ les indices et les ensembles d'indices complémentaires sont situés sur la même ligne. C'est ainsi que ce tableau Δ comprend 2 fois 3 colonnes.

Dans la colonne (1) on inscrit, dans le groupe I, le nombre d'arêtes qui limitent la face indiquée, puis dans les groupes suivants, les sommes pures et simples de ces nombres.

La colonne (2) est réservée aux doubles indices, autrement-dit au nombre d'arêtes de liaison que l'on trouve suivant la face de base qui a été choisie.

La colonne (3) enfin donne le nombre d'arêtes de chaque solution du système (1). Ce nombre est le résultat de la soustraction de celui de la

	(1)	(2)	(3)	⑤	(1)	(2)	(3)
0			0	1,2,3,4,5	19	7	5
1	3		3	2,3,4,5	16	5	6
2	3		3	1,3,4,5	16	5	6
3	5		5	1,2,4,5	14	3	8
4	4		4	1,2,3,5	75	4	7
5	4		4	1,2,3,4	15	4	7
1,2	6	6	6	3,4,5	13	3	7
1,3	8	1	6	2,4,5	11	2	7
1,4	7	1	5	2,3,5	12	3	6
1,5	7		7	2,3,4	12	2	8
2,3	8	1	6	1,4,5	11	2	7
2,4	7		7	1,3,5	12	2	8
2,5	7	1	5	1,3,4	12	3	6
3,4	9	1	7	1,2,5	10	1	8
3,5	9	1	7	1,2,4	10	1	8
4,5	8	1	6	1,2,3	11	2	7

colonne (1), de la même ligne, diminué de deux fois le nombre de la colonne (2) quand ce dernier existe.

Tels sont les caractères de la méthode d'investigation que nous avons adoptée. Nous appliquons cette méthode à l'exemple (b) précité Planche 1 en choisissant tout d'abord comme face de base un pentagone, ce que nous indiquons par le chiffre ⑤.

L'examen de ce tableau conduit aux constatations suivantes:

- (a) Le nombre $k = 5$ est mentionné au haut du tableau.
- (b) Le total des arêtes des 5 faces 1, 2, 3, 4, 5 est égal à $t = 19$. C'est un nombre impair.
- (c) Sur chaque ligne, la somme des deux nombres des colonnes (1) est égale à t .
- (d) Du moment que t est un nombre impair, si l'un des nombres de la colonne (1) ou de la colonne (3) est impair, l'autre est pair.
- (e) On remarque que le 0 du groupe 0 rentre dans la catégorie des solutions paires.
- (f) Il s'en suit qu'à toute solution impaire du système 1, correspond une solution paire et réciproquement.
- (g) Le système 1 a donc 16 solutions impaires et 16 solutions paires, la solution 0 étant incorporée aux solutions paires.

Nous consignons ces solutions dans le tableau qui suit d'après le nombre d'arêtes qu'elles comportent.

TABLEAU DU NOMBRE DES SOLUTIONS

Groupes	Nombre d'arêtes							Total
	3	5	7	0	4	6	8	
0				1				1
I	2	1			2			5
II	2	4			4			10
III			4			2	4	10
IV			2			2	1	5
V		1						1
Totaux	2	4	10	1	2	8	5	32

Il y a bien 16 solutions impaires et 16 solutions paires. On peut également les présenter en faisant apparaître le total des arêtes par groupes.

On est alors conduit à un nouveau tableau Δ que nous conviendrons de désigner sous le nom de *tableau Δ condensé*:

TABLEAU Δ CONDENSÉ

Groupes	Nombre d'arêtes		
	(1)	(2)	(3)
I	19		19
II	76	7	62
III	114	21	72
IV	76	21	34
V	19	7	5
Totaux	304	56	192

Faut-il rappeler que les nombres de la colonne (3) s'obtiennent en soustrayant de ceux de la colonne (1) le double des nombres de la colonne (2).

Au surplus le total 192 n'est pas autre chose que le produit de 12 par 16, soit $\alpha_1 \cdot 2^4$.

Il va de soi que l'on aurait parfaitement pu répéter les mêmes opérations en choisissant comme face de base un triangle ou un quadrilatère. Avec un quadrilatère par exemple $k = 4$, $t = 20$. Le tableau Δ condensé aurait eu alors la disposition suivante:

TABLEAU Δ CONDENSÉ

	(1)	(2)	(3)
I	20		20
II	80	8	64
III	120	24	72
IV	80	24	32
V	20	8	4
Totaux	320	64	192

La répartition des solutions dans les différents groupes est sans doute différente de la précédente, en particulier sur chaque ligne du tableau Δ les solutions sont toutes deux impaires ou toutes deux paires, mais le

résultat final est le même. Nous allons le montrer en reprenant l'examen du même exemple, mais en faisant en sorte que les faces 1, 2, 3, 4 soient les mêmes que précédemment. Ainsi seule la face 5 aura changé. Elle était un quadrilatère, elle devient maintenant un pentagone. Voici donc le nouveau tableau Δ .

TABLEAU Δ

	(1)	(2)	(3)	④	(1)	(2)	(3)
0			0	1,2,3,4,5	20	8	4
1	3		3	2,3,4,5	17	5	7
2	3		3	1,3,4,5	17	6	4
3	5		5	1,2,4,5	15	4	7
4	4		4	1,2,3,5	16	5	6
5	5		5	1,2,3,4	15	4	7
1,2	6		6	3,4,5	14	3	8
1,3	8	1	6	2,4,5	12	2	8
1,4	7	1	5	2,3,5	13	3	7
1,5	8	1	6	2,3,4	12	2	8
2,3	8	1	6	1,4,5	12	3	6
2,4	7		7	1,3,5	13	3	7
2,5	8	1	6	1,3,4	12	3	6
3,4	9	1	7	1,2,5	11	2	7
3,5	10	1	8	1,2,4	10	1	8
4,5	9	1	7	1,2,3	11	2	7

Ainsi que nous l'avons annoncé, ce tableau Δ est sensiblement différent du précédent. t étant pair ($t = 20$) sur chaque ligne les nombres des

TABLEAU DU NOMBRE DE SOLUTIONS

Groupes	Nombre d'arêtes							Total
	3	5	7	0	4	6	8	
0				1				1
I	2	2			1			5
II		1	3			5	1	10
III			4			2	4	10
IV		1	3			1		5
V				1				1
Totaux	2	4	10	1	2	8	5	32

colonnes (1) et (3) ont même parité. La répartition des solutions dans les différents groupes a également changé. Pourtant le résultat final est demeuré le même, ce qui est normal, les contours fermés constitués par des arêtes du polyèdre dépendant de ce dernier et non pas de la façon de les obtenir. Voici au demeurant le tableau de répartition de ces solutions.

Comme précédemment il y a 16 solutions impaires et 16 solutions paires à la condition d'incorporer à ces dernières la solution 0.

Mais il y a mieux. Dans les deux tableaux Δ les indices 1, 2, 3, 4 caractérisent les mêmes faces du polyèdre envisagé. L'indice 5 se rapporte à un quadrilatère lorsque la face de base est un pentagone, tandis qu'il se rapporte à un pentagone lorsque la face de base est un quadrilatère. Il s'en suit que les solutions du système 1 qui ne font état que des indices 1, 2, 3, 4 sont exactement les mêmes dans les deux cas. Seules celles qui sont relatives à l'indice 5 sont modifiées. Il nous a donc paru judicieux de grouper les deux tableaux Δ en un seul, ce qui nous a conduit au tableau suivant:

 TABLEAU Δ

⑤			④			⑤			④		
(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
0		0			0	5	4	4	5		5
1	3	3	3		3	1,5	7	7	8	1	6
2	3	3	3		3	2,5	7	1 5	8	1	6
3	5	5	5		5	3,5	9	1 7	10	1	8
4	4	4	4		4	4,5	8	1 6	9	1	7
1,2	6	6	6		6	1,2,5	10	1 8	11	2	7
1,3	8	1 6	8	1	6	1,3,5	12	2 8	13	3	7
1,4	7	1 5	7	1	5	1,4,5	11	2 7	12	3	6
2,3	8	1 6	8	1	6	2,3,5	12	3 6	13	3	7
2,4	7	7	7		7	2,4,5	11	2 7	12	2	8
3,4	9	1 7	9	1	7	3,4,5	13	3 7	14	3	8
1,2,3	11	2 7	12	2	7	1,2,3,5	15	4 7	16	5	6
1,2,4	10	1 8	10	1	8	1,2,4,5	14	3 8	15	4	7
1,3,4	12	3 6	12	3	6	1,3,4,5	16	5 6	17	6	5
2,3,4	12	2 8	12	2	8	2,3,4,5	16	5 6	17	5	7
1,2,3,4	15	4 7	15	4	7	1,2,3,4,5	19	7 5	20	8	4

Ce double tableau Δ mérite une attention particulière. Il ne faut pas oublier qu'il s'agit du même polyèdre examiné en partant de deux faces

de base différentes. Dans chacun des cas on a trouvé 16 solutions impaires et 16 solutions paires (0 y compris).

Dans la moitié de gauche de ce double tableau Δ , les deux groupes de colonnes correspondant aux faces de base ⑤ et ④ sont identiques, ce qui n'a rien d'extraordinaire attendu qu'il s'agit des faces 1, 2, 3, 4 du polyèdre, lesquelles sont les mêmes dans les deux cas. Leur frontière extérieure est celle des deux faces utilisées comme faces de base (un quadrilatère et un pentagone), soit un polygone d'un nombre impair de côtes. Il s'en suit que le nombre des solutions paires (0 y compris) est égal à celui des solutions impaires et que ce nombre est égal à 8.

Ainsi on est en droit de conclure que dans la moitié de droite de ce double tableau il y a également pour chaque groupe de colonnes ⑤ et ④, égalité entre les solutions paires et les solutions impaires. Mais ce qu'il y a de curieux c'est que sur chaque ligne de ce tableau si la solution est paire en base ⑤ elle est impaire en base ④ et réciproquement. Il s'en suit que le total des arêtes des solutions paires est égal à celui des solutions impaires. C'est précisément ce qu'il importait de mettre en évidence.

Au surplus on constate encore que si, dans cette seconde moitié du tableau Δ , on parcourt la colonne (3) de haut en bas en base ⑤, on retrouve les mêmes solutions que si l'on parcourt de bas en haut la colonne (3) en base ④. Ce qui se justifie aisément.

En résumé l'ensemble des 23 solutions du système 1 comporte $12 \times 16 = a_1 \cdot 2^4 = 192$ arêtes. Il y a 16 solutions impaires et 16 solutions paires qui totalisent chacune

$$12 \times 8 = a_1 \cdot 2^3 = 96 \text{ arêtes.}$$

Ces résultats ne sont pas l'apanage de cet exemple seul. C'est ce que nous allons faire voir dans les pages qui suivent.

Retour au Cas général

Rappelons que les polyèdres que nous examinons renferment a_2 faces, a_1 arêtes, a_0 sommets. Ils sont homéomorphes à la sphère. Leurs arêtes forment un graphe homogène de degré 3. Chaque face est limitée par un seul contour fermé, lequel comprend au minimum 2 arêtes et au maximum a_0 . La classe du polyèdre $\mu = a_2 - 1$. Les matrices A et B ont été dressées. On a établi le système 1 : système d'équations linéaires et homo-

gènes qui comporte 2^μ solutions (la solution 0 comprise). A l'exception de cette dernière, toutes les solutions du système 1 sont représentées par des contours fermés, ou des ensembles de contours fermés, formés par des arêtes du polyèdre.

Il est évident que si toutes les faces d'un polyèdre sont paires, toutes les solutions du système 1 le sont également. Il s'en suit que tous les graphes homogènes de degré 2 issus du graphe homogène de degré 3 considéré ne peuvent être que du type I ou du type II. Il conviendra donc d'examiner dorénavant des polyèdres présentant des faces impaires.

Du moment que a_0 est un nombre pair, s'il existe des faces impaires, celles-ci sont en nombre pair. Si donc a_2 est pair, toutes les faces du polyèdre peuvent être impaires. Nous nous proposons de montrer que, quelque soit le nombre des faces impaires du polyèdre, le système 1 a un nombre égal de solutions impaires et de solutions paires. Pour cela nous introduisons un tableau Δ dont la disposition est la suivante:

TABLEAU Δ

Groupes	Groupes	Nombre de lignes par groupe
0	μ	1
I	$\mu \leq 1$	μ
II	$\mu - 2$	$\binom{\mu}{2}$
III	$\mu - 3$	$\binom{\mu}{3}$
IV	$\mu - 4$	$\binom{\mu}{4}$
.	.	
.	.	
.	.	

Le tableau Δ est donc double. Il contient deux fois les 3 colonnes (1), (2), (3) exposées dans l'exemple qui précède. Les ensembles d'indices complémentaires sont situés sur la même ligne.

Dans la colonne (1) les lignes du groupe I mentionnent les nombres d'arêtes qui limitent les μ faces du polyèdre retenues pour nos opérations. La face de base est donc exclue. Dans les autres groupes on trouve les résultats des additions pures et simples des nombres du groupe I, ceci conformément aux indices qui les caractérisent. Il convient de rappeler que chaque indice 1, 2, 3, ..., μ se retrouve dans les différents groupes un nombre de fois égal au coefficient correspondant du binôme $2^{\mu-1}$.

Si k est le nombre d'arêtes limitant la face de base, le total des nombres du groupe I de la colonne (1) est égal à t , $t = 2\alpha_1 - k$. Dans les autres groupes ce total est égal au produit de t par le coefficient correspondant du binôme $2^{\mu-1}$ ainsi que le montre le tableau suivant:

Groupe	Total des nombres de la colonne (1)
I	t
II	$(\mu - 1)t$
III	$\binom{\mu - 1}{2}t$
IV	$\binom{\mu - 1}{3}t$
.	.
.	.
.	.
$\mu - 1$	$(\mu - 1)t$
μ	t

La colonne (2) enregistre le nombre d'arêtes de liaison qui subsistent dans le polyèdre lorsque l'on a enlevé la face de base. Ce sont les doubles indices dont il a été question précédemment. La face de base étant limitée par k arêtes, il reste un nombre $r = \alpha_1 - k$ d'arêtes de liaison, soit r doubles-indices. Il n'y en a pas dans le groupe I. Dès lors chacun d'eux apparaît dans les groupes II, III, IV, ... un nombre de fois qui est fixé par le coefficient correspondant du binôme $2^{\mu-2}$.

Il y en a par conséquent r dans le groupe II et dans les groupes suivants les nombres indiqués dans le tableau ci-après:

Groupe	Total des nombres de la colonne (2)
I	0
II	r
III	$(\mu - 2)r$
IV	$\binom{\mu - 2}{2}r$
.	.
.	.
.	.
$\mu - 1$	$(\mu - 2)r$
μ	r

La colonne (3) enfin donne le nombre des arêtes de chaque solution du système 1. On l'obtient en soustrayant du nombre de la colonne (1) le double de celui de la colonne (2) quand ce dernier existe.

Ces considérations permettent de dresser le tableau Δ condensé qui suit:

 TABLEAU Δ CONDENSE

Groupe	Nombre d'éléments du groupe	Nombre d'arêtes		
		au total par groupe (1)	de liaison par groupe (2)	des solutions par groupe (3)
0	1	0	0	0
I	μ	t	0	t
II	$\binom{\mu}{2}$	$(\mu - 1) t$	r	$(\mu - 1) t - 2 r$
III	$\binom{\mu}{3}$	$\binom{\mu - 1}{2} t$	$(\mu - 2) r$	$\binom{\mu - 1}{2} 2 (\mu - 2) r$
IV	$\binom{\mu}{4}$	$\binom{\mu - 1}{3} t$	$\binom{\mu - 2}{2} r$	$\binom{\mu - 1}{3} t - 2 \binom{\mu - 2}{2} r$
V	$\binom{\mu}{5}$	$\binom{\mu - 1}{4} t$	$\binom{\mu - 2}{3} r$	$\binom{\mu - 1}{4} t - 2 \binom{\mu - 2}{3} r$
.
.
.
μ	1	t	r	$t - 2 r$
Total	2^μ	$2^{\mu-1} \cdot t$	$2^{\mu-2} \cdot r$	$2^{\mu-1} t - 2 \cdot 2^{\mu-2} r$

$$t = 2\alpha_1 - k \quad r = \alpha_1 - k$$

$$\text{Total des arêtes des solutions} = N. \quad N = 2^{\mu-1}(t - r) = 2^{\mu-1} \cdot \alpha_1.$$

Les polyèdres que nous examinons maintenant ont tous des faces impaires. Il s'agit encore de distinguer ceux qui ont des faces paires de ceux qui n'en ont pas. Convenons donc que:

(a) *Toutes les faces du polyèdre sont impaires.* Dans ce cas α_2 est pair, μ , k et t sont impairs. Le groupe I n'a que des solutions impaires, le groupe II des solutions paires, le groupe III des solutions impaires, On sait que dans le binôme la somme des coefficients de rang impair est égale à celle des coefficients de rang pair. Il s'en suit qu'il y a autant de solutions

impaires que de solutions paires, 0 étant compté au nombre des solutions paires. Mais cette égalité subsiste si l'on multiplie ces coefficients par un facteur constant t ou r pour former une combinaison linéaire. Il en résulte que les totaux des arêtes de ces solutions sont encore égaux.

(b) *Le polyèdre a des faces paires, une au minimum.* Dans la numérotation des faces, on fait en sorte que la dernière, la face de rang a_2 , soit impaire tandis que la précédente, celle de rang $\mu = a_2 - 1$, est paire. Ainsi t est impair. Il s'en suit que sur chaque ligne du tableau .1, si l'une des solutions est impaire, l'autre est paire. Il y a donc égalité entre le nombre de solutions impaires et celui des solutions paires.

On peut alors intervertir la face de base du polyèdre avec celle de rang μ qui devient à son tour face de base, ainsi que nous l'avons fait dans l'exemple précité. Les caractères que nous avons alors mis en évidence se retrouvent intégralement dans le cas général de telle sorte que le total des arêtes des solutions impaires est encore égal à celui des solutions paires.

Il s'en suit que pour tous les réseaux cubiques tracés sur une sphère le total des arêtes de l'ensemble des solutions donne

$$N = \alpha_1 \cdot 2^{\mu-1}$$

Si le polyèdre présente des faces impaires, peu importe leur nombre, il y a égalité entre le nombre des solutions impaires et celui des solutions paires, 0 y compris, ce total valant

$$1/2 N = \alpha_1 \cdot 2^{\mu-2}.$$

Ce résultat d'une grande simplicité méritait, nous semble-t-il, d'être signalé.

DEUXIEME PARTIE

Répartition des Arêtes des Solutions dans les différents Groupes I, II, III...

Les faces des polyèdres que nous envisageons comptent au minimum 2 et au maximum α_0 arêtes. Il va de soi que suivant le choix de la face de base qui a été opéré, la répartition des arêtes des différentes solutions dans les groupes I, II, III, ... définis plus haut, varie. Toutefois pour un

μ déterminé, le total des arêtes de l'ensemble des solutions demeure invariable puisqu'il est égal à $2^{\mu-1} \cdot \alpha_1$.

Rappelons en outre que le total des arêtes des solutions du groupe I est le nombre t et que k est le nombre des arêtes qui limitent la face de base. C'est celui qui figure dans le dernier groupe. On sait que $k + t = 2\alpha_1$.

Voici donc cette répartition:

Groupes Nombre d'arêtes par groupe

		Classe $\mu = 3$			$\alpha_2 = 4$	$\alpha_1 = 6$	$\alpha_0 = 4$
I	t	10	9	8			
II		12	12	12			
III	k	2	3	4			
Total		24	24	24			

		Classe $\mu = 4$			$\alpha_2 = 5$	$\alpha_1 = 9$	$\alpha_0 = 6$
I	t	16	15	14	13	12	
II		34	33	32	31	30	
III		20	21	22	23	24	
IV	k	2	3	4	5	6	
Total		72	72	72	72	72	

		Classe $\mu = 5$			$\alpha_2 = 6$	$\alpha_1 = 12$	$\alpha_0 = 8$
I	t	22	21	20	19	18	16
II		68	66	64	62	60	56
III		72	72	72	72	72	72
IV		28	30	32	34	36	40
V	k	2	3	4	5	6	8
Total		192	192	192	192	192	192

Groupes Nombre d'arêtes par groupe

		Classe $\mu = 6$				$\alpha_2 = 7$				$\alpha_1 = 15$				$\alpha_0 = 10$			
I	t	28	27	26	25	24	23	22	21	20							
II		114	111	108	105	102	99	96	93	90							
III		176	174	172	170	168	166	164	162	160							
IV		124	126	128	130	132	134	136	138	140							
V		36	39	42	45	48	51	54	57	60							
VI	k	2	3	4	5	6	7	8	9	10							
Total		480	480	480	480	480	480	480	480	480							

		Classe $\mu = 7$				$\alpha_2 = 8$				$\alpha_1 = 18$				$\alpha_0 = 12$			
I	t	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24					
II		172	168	164	160	156	152	148	144	140	136	132					
III		350	345	340	335	330	325	320	315	310	305	300					
IV		360	360	360	360	360	360	360	360	360	360	360					
V		190	195	200	205	210	215	220	225	230	235	240					
VI		44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84					
VII	k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12					
Total		1152	1152	1152	1152	1152	1152	1152	1152	1152	1152	1152					

Une Impossibilité

Au début de cette étude nous pensions pouvoir déterminer le nombre n de graphes R que renferme un graphe homogène de degré 3 donné.

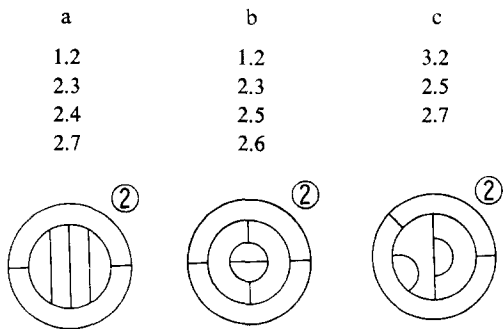


PLANCHE 2

Finalement nous avons été obligé de reconnaître que cela n'était pas possible avec la méthode de Veblen. Nous allons en fournir la preuve en utilisant pour cela les 3 exemples que voici. Tous trois sont des polyèdres qui appartiennent à la classe $\mu = 6$. Ils ont 4 faces impaires et 3 paires. Nous les désignons par a, b, c.

Ces exemples conduisent chacun à 64 solutions du système 1. Le total des arêtes qui les composent est $N = 480$. Pour faciliter la comparaison que nous désirons faire, nous avons choisi comme face de base, ainsi que le montre la planche 2, une face limitée par 2 arêtes seulement. La répartition de ces solutions et des arêtes qui les composent, dans les différents groupes, est la suivante.

Groupe	Nombre de solutions	Total des arêtes
0	1	0
I	6	28
II	15	114
III	20	176
IV	15	124
V	6	36
VI	1	2
Total	64	480

Il s'agit maintenant d'en examiner le détail. Ces exemples constituent une illustration parfaite de la théorie que nous venons de développer. Les 64 solutions du système 1 comprennent 32 solutions impaires et 32 solutions paires (0 y compris).

$$N = 480 = 15 \cdot 32 = 15 \cdot 2^5.$$

Les solutions impaires totalisent 240 arêtes, comme du reste les solutions paires. Les totaux par groupes sont les mêmes dans les 3 cas.

Ce qui diffère par contre, c'est la répartition dans les groupes des totaux partiels relatifs aux solutions impaires et aux solutions paires. Il y a parfois des compensations, mais ce qui nous paraît le plus important c'est qu'un même total partiel peut conduire à des nombres de graphes R différents.

Nous avons désigné par N_1 le total partiel par groupe des arêtes des

solutions impaires et par N_2 celui des arêtes des solutions paires. Or dans le groupe III, ce dernier total 108 caractérise

6 graphes R sur le polyèdre a,
8 b,
7 c.

Groupe	Nombre d'arêtes											N_2
	3	5	7	9	N_1	0	2	4	6	8	10	
<i>Polyèdre a</i>												
0						1						0
I	2		2		20			2				8
II		2	2	4	60				2	4	1	54
III			2	6	68					6	6	108
IV			2	6	68					7		56
V		2	2		24				2			12
VI							1					2
Total	2	4	10	16	240	1	1	2	4	17	7	240
<i>Polyèdre b</i>												
0						1						0
I	2	2			16				2			12
II			4	4	64			1	1	5		50
III			2	6	68				2	2	8	108
IV				8	72			1	1	4	1	52
V		4			20					2		16
VI							1					2
Total	2	6	6	18	240	1	1	2	6	13	9	240
<i>Polyèdre c</i>												
0						1						0
I		2	2		24		2					4
II		1	6	1	56			1		3	3	58
III			2	6	68				1	4	7	108
IV			4	4	64				2	1	4	60
V		1	2	1	28			2				8
VI							1					2
Total		4	16	12	240	1	3	3	3	8	14	240

Ce procédé ne permet donc pas de déterminer le nombre n de graphes R contenus dans un graphe homogène du degré 3 donné.

Le tableau qui suit indique la répartition des solutions. La moitié de gauche a trait aux solutions impaires et celle de droite aux solutions paires. On compte en tout

7 graphes R sur le polyèdre	a,
9	b,
14	c.

Le Greffage

DÉFINITION. Sur une arête d'un polyèdre, n'importe laquelle on marque 2 points que l'on considère comme 2 nouveaux sommets. En les réunissant par une nouvelle arête, on crée une nouvelle face, partant un polyèdre dont la classe a augmenté d'une unité.

EXEMPLE 1. Appliquons cette définition au tétraèdre

$$\mu = 3, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_1 = 6, \quad \alpha_0 = 4.$$

Il renferme 3 graphes R , tous 3 du type I, et 3 graphes L . Nous représentons ces 2 types de graphes planche 3.

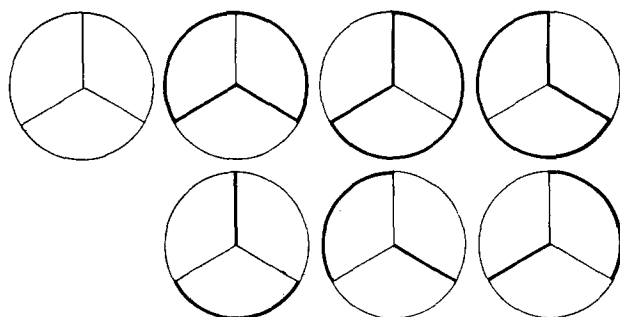


PLANCHE 3

Chaque arête du graphe homogène de degré 3 de ce polyèdre se retrouve sur 2 graphes R .

Un premier greffage conduit à un polyèdre de la classe $\mu = 4$. Nous représentons planche 4 les différents graphes R qui en résultent.

On constate que lorsque le greffage a eu lieu sur une arête d'un graphe R , il a conduit à 2 nouveaux graphes R . Si par contre l'opération s'est effectuée sur une arête d'un graphe L il en est résulté qu'un seul nouveau graphe R . C'est d'ailleurs une constatation qui sera générale. On est donc en présence de 5 nouveaux graphes R , dont 4 sont dy type I et 1 du type II.

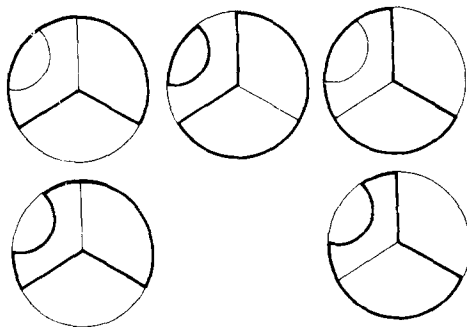


PLANCHE 4

Chaque graphe R utilise 6 arêtes, cela fait donc 30 arêtes en tout. Le graphe homogène de degré 3 ayant 9 arêtes, 6 d'entre elles appartiennent à 3 graphes R , les 3 autres à 4 graphes R .

Nous allons procéder à un second greffage en utilisant pour cela une arête qui appartient à 3 graphes R . On est ainsi conduit à un polyèdre de la classe $\mu = 5$:

$$\mu = 5, \quad \alpha_2 = 6, \quad \alpha_1 = 12, \quad \alpha_0 = 8.$$

Ce que nous venons de voir se maintient: chacun des 3 greffages effectués sur une arête d'un graphe R conduit à 2 nouveaux graphes R , les deux autres effectués sur une arête d'un graphe L ne donnant lieu qu'à un seul nouveau graphe R . C'est que montre la planche 5.

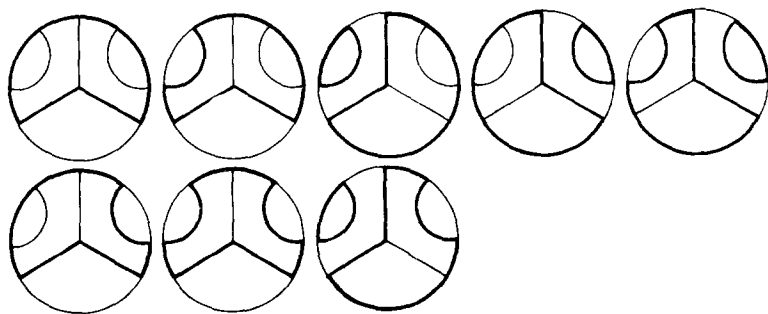


PLANCHE 5

Un troisième greffage nous conduit à un polyèdre de la classe $\mu = 6$:

$$\mu = 6, \quad \alpha_2 = 7, \quad \alpha_1 = 15, \quad \alpha_0 = 10.$$

Mais avant d'y procéder, une remarque s'impose. Les deux premiers greffages ont été opérés sur des arêtes du graphe R de la première figure de la planche 3. Si pour le troisième on utilise une autre arête de ce même graphe R , il n'y a aucune raison pour que l'on ne retrouve pas sur le polyèdre de cette classe d'autres graphes R du type I. Ainsi la première figure de la Planche 6 présente un polyèdre qui renferme 14 graphes R dont 8 sont du type I et 6 du type II.

Mais si le troisième greffage a lieu conformément aux figures 2 et 3 de la planche 6, autrement dit en utilisant des arêtes du graphe L , il n'y a plus aucun graphe R du type I. C'est la première fois que l'on présente un résultat si simple et si probant.

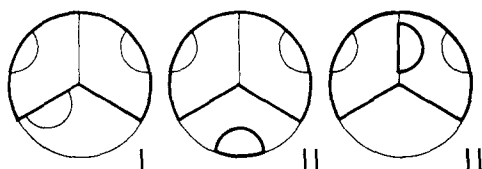


PLANCHE 6

Voyons encore un autre exemple en partant du polyèdre de la classe $\mu = 4$.

$$\mu = 4, \quad \alpha_2 = 5, \quad \alpha_1 = 9, \quad \alpha_0 = 6.$$

Ce polyèdre renferme 4 graphes R et par conséquent 4 graphes L que nous représentons planche 7.

Des 4 graphes R , 3 sont du type I et 1 du type III.

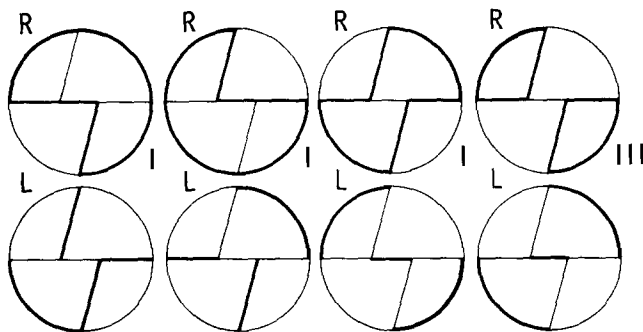


PLANCHE 7

Trois greffage successifs conduisent à un polyèdre de la classe $\mu = 7$:

$$\mu = 7, \quad \alpha_2 = 8, \quad \alpha_1 = 18, \quad \alpha_0 = 12.$$

Là encore l'on constate que si les trois greffages ont été effectués sur des arêtes d'un graphe R du type I le graphe homogène de degré 3 qui en résulte renferme encore des graphes R du type I. C'est ce que montrent les deux premières figures de la planche 8.

Si par contre le troisième greffage utilise une arête du graphe L , il n'y a plus de graphe R du type I. Les deux dernières figures de la planche 8 en sont la preuve.

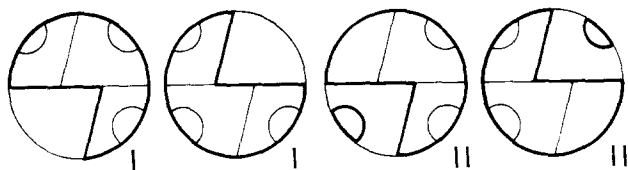


PLANCHE 8

Ces exemples montrent l'importance qu'il faut attacher au greffage lequel est un moyen et non but. Il s'agissait de faire voir quand et pour quelles raisons un graphe homogène de degré 3 lié au plan ou à la sphère pouvait ne pas présenter de graphe R du type I. En pareil cas le polyèdre présente nécessairement des faces qui ont en commun deux arêtes frontières, si ce n'est plus. Or Errera dans son "cas difficile" a précisément posé la condition que deux faces qui ont une frontière commune ne peuvent être adjacentes que le long d'une seule arête. Nous sommes ainsi tout naturellement conduit à examiner des

Polyèdres appartenant au « Cas difficile » de Errera

Nous avons étudié à l'aide des équations de Veblen 40 polyèdres qui rentrent dans les classes $\mu = 3$ à $\mu = 8$. Pour chacun d'eux nous avons relevé le nombre de graphes R qu'ils renferment et classés ce graphes R dans les divers types I, II, III. Cela nous a permis de dresser le tableau T qui suit.

A ce propos nous devons noter que si le graphe R est du type I, il est d'un seul tenant, soit représenté par un contour fermé unique. On peut le parcourir dans un sens déterminé (peu importe lequel) en notant d'un indice 1, 2, 1, 2, ... les arêtes ainsi rencontrées. Les arêtes d'indice 1,

comme du reste celles d'indice 2, forment un graphe L . Le graphe homogène de degré 3 est ainsi décomposé en 3 graphes L . L'association de ces derniers 2 à 2, conduit à 3 graphes R qui sont soit du type I, soit du type II.

S'il existe un graphe du type II, celui-ci comprend au moins 2 contours fermés que l'on peut traiter indépendamment comme on la fait ci-dessus du graphe du type I. On aboutit de cette façon à 4 graphes L caractérisés par les indices

1	1	2	2
1	2	1	2

Le nombre des graphes R qui en résultent est ainsi augmenté.

Si le graphe R du type II comprend 3 contours fermés, la répétition des opérations précédentes conduit aux graphes L caractérisés par les indices

1	1	1	2	1	2	2	2
1	1	2	1	2	1	2	2
1	2	1	1	2	2	1	2.

Ce qui ne peut qu'augmenter le nombre des graphes R des types I et II.

TABLEAU T

RÉPARTITION DES GRAPHES HOMOGÈNES DE DEGRÉ 2 CONTENUS DANS UN GRAPHE HOMOGÈNE DE DEGRÉ 3 APPARTENANT AU "CAS DIFFICILE".

Nombre de faces du polyèdre limitées par								Types de graphes R			
	3	4	5	6	7	8	arêtes $\mu = 3$	I	II	III	n
1	4							3			3
							$\mu = 4$				
2	2	3						3		1	4
							$\mu = 5$				
3	2	2	2					3		2	5
		6						6	3		9
							$\mu = 6$				
5	3		3	1				3		3	6
6	2	2	2	1				3		3	6
7	2	3		2				3		4	7
8	1	3	3					6	3		9
9		5	2					5	5	1	11

Tableau T (*suite*)

	3	4	5	6	7	8	arêtes $\mu = 7$	I	II	III	<i>n</i>
10	3	1	1	3				3		4	7
11	2	2	3		1			3		4	7
12	3	1	2	1	1			3		5	8
13	4			4				3		5	8
14	2	3	1	1	1			3		5	8
15	2	4			2			3		7	10
16	2	1	4	1				6	3		9
17	2	2	2	2				6	3	1	10
18	2		6					6	3	1	10
19	1	4	1	2				6	3	3	12
20	1	3	3	1				5	5	2	12
21		4	4					7	1	4	12
22		6		2				8	12		20
							$\mu = 8$				
23	4	1		2	2			3		6	9
24	4		2	2		1		3		6	9
25	2	3	2	1		1		3		6	9
26	2	2	4			1		3		6	9
27	2	4		2		1		3		8	11
28	2	5				2		3		10	13
29		3	6					6		6	12
30	3	1	2	2	1			6	3	2	11
31	2	2	3	1	1			6	3	3	12
32	2	1	5		1			5	5	2	12
33	1	4	2	1	1			5	5	5	15
34	2	3		4				5	5	5	15
35	1	2	5	1				7	1	4	12
36	1	3	3	2				7	1	6	14
37		4	4	1				8	5	4	17
38		7			2			7	21	1	29
39		5	2	2				9	8	4	21
40		6		3				12	15		27